

► **R07** Calculer :

$$I = \int_0^2 \frac{x^2 + 2}{x + 1} dx$$

Corrigé

Pour tout $x \in [0; 2]$, on pose : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$.

On souhaite obtenir des constantes a , b et c telles que :

$$\forall x \in [0; 2], f(x) = ax + b + c \times \frac{1}{x + 1}$$

On a :

$$ax + b + \frac{c}{x + 1} = \frac{(ax + b)(x + 1)}{x + 1} + \frac{c}{x + 1} = \frac{ax^2 + (a + b)x + b + c}{x + 1}$$

Par identification avec $\frac{x^2 + 2}{x + 1}$, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -a \\ c = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \end{cases}$$

En posant pour tout $x \in [0; 2]$, $u(x) = x + 1$, on a :

$$f(x) = x - 1 + 3 \times \frac{1}{x + 1} = x - 1 + 3 \times \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$, $u > 0$ sur l'intervalle d'étude, est $\ln(u)$ donc en notant F une primitive de f sur $[0; 2]$, on en déduit :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln(x + 1)$$

Comme f est continue sur $[0; 2]$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x) dx &= [F(x)]_0^2 = \left[\frac{x^2}{2} - x + 3 \ln(x + 1) \right]_0^2 \\ &= \frac{2^2}{2} - 2 + 3 \ln(2 + 1) - \left(\frac{0^2}{2} - 0 + 3 \ln(0 + 1) \right) \\ &= 3 \ln 3 - 0 = 3 \ln 3 \end{aligned}$$

Résumons : $I = 3 \ln 3$.

